Размерности коммутативных матричных алгебр[$]

О. С. Лебедева[@], Е. Е. Тыртышников[@]

Рассмотрена задача построения верхних оценок размерностей матричных коммутативных алгебр. Задача для произвольных матричных алгебр сводится к задаче для алгебр из матриц специального вида. Получено новое простое доказательство общей точной оценки $n^2/4 + 1$; *построены новые оценки, зависящие от дополнительных характеристик, связанных с дефектами матриц.*

1. Введение

Под матричной алгеброй будем понимать линейное подпространство $\Omega \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$, замкнутое относительно операции умножения. Коммутативность означает, что все матрицы Ω попарно перестановочны: $\forall\ A, B \in \Omega :\ \ AB = BA$. Будем рассматривать только коммутативные алгебры. При этом не требуем, чтобы в Ω содержалась единичная матрица I.

Нас будут интересовать различные оценки размерности Ω, зависящие от n и других возможных величин, характеризующих алгебру Ω. Сразу можно отметить, что нижняя оценка равна 1 (множество скалярных матриц является алгеброй). Элементарно получается верхняя оценка $\dim(\Omega) < n^2$ при $n \geqslant 2$ (поскольку если $\dim \Omega = n^2$, то $\Omega = \mathbb{C}^{n\times n}$, а в $\mathbb{C}^{n\times n}$ при $n \geqslant 2$ всегда есть пара некоммутирующих матриц). Попытаемся построить более тонкие верхние оценки.

[$]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ №05-01-00721)

[@]Институт вычислительной математики РАН

Известны алгебры размерности $n^2/4+1$. Например, множество всех матриц вида

$$\alpha I + \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n},\ \alpha \in \mathbb{C},\ A \in \mathbb{C}^{n/2\times n/2} \tag{1}$$

является коммутативной матричной алгеброй такой размерности.

В случае матриц, подчинённых некоторым условиям, для нас представляют интерес оценки вида $cn^2 + O(n)$ $(c < 1)$. Довольно легко получить оценку $n^2/2+1$, но она оказывается сильно завышена. Точная верхняя оценка $n^2/4+1$ была установлена ещё Шуром. Доказательство этого факта в русскоязычной литературе опирается на теорию нормальных форм Кравчука. Эта теория представлена в [1] в виде последовательности трёх основных теорем Кравчука и различных вспомогательных утверждений. Изучая доказательства, мы заметили, что в теореме 1 из [1] частично используется теорема 3, которая, в свою очередь, опирается на теорему 1. Все утверждения остаются, конечно, в силе, а замеченная неточность может быть исправлена. В данной работе мы покажем, что, оставаясь в том же круге идей, можно дать простое прямое доказательство теоремы Шура, не опирающееся на теорию Кравчука.

Особый интерес представляют ситуации, когда кроме размеров матриц алгебры известны какие-то дополнительные её характеристики. Мы получим оценки размерностей этих алгебр через характеристики, связанные с дефектами матриц. Но сначала поясним, как от случая произвольной матричной алгебры перейти к рассматрению более узкого класса алгебр.

При изучении коммутативных алгебр особую роль играют классы алгебр, в которых каждая матрица имеет единственное собственное значение. Если все матрицы алгебры нильпотентны (то есть все собственные значения всех матриц равны 0), то алгебра также называется *нильпотентной*. Очевидно, в нильпотентной алгебре единицы нет.

Матрицы, отличающиеся от нильпотентных сдвигом на скалярную матрицу, будем называть *квазинильпотентными*, как и алгебры, состоящие только из таких матриц. Каждой квазинильпотентной алгебре соответствует единственная нильпотентная: $\Omega =$

$\{\alpha I + C \mid \alpha \in \mathbb{C},\ C \in \Omega_{nil}\}$, при это их размерности отличаются на единицу $\dim(\Omega) = \dim(\Omega_{nil}) + 1$).

Существует способ свести вопрос оценки размерности произвольной матричной алгебры Ω к вопросу построения оценок для набора квазинильпотентных и нильпотентных алгебр, состоящих из матриц меньших размеров. Мы будем пользоваться тем, что одинаковое преобразование подобия для всех матриц коммутативной алгебры порождает новую коммутативную алгебру той же размерности (это объясняется тем, что матрицы базисов попарно подобны). Такие алгебры будем называть подобными.

Выберем некоторый произвольный базис Ω: $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$. Эти матрицы попарно коммутируют, поэтому существует такая обратимая матрица $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$, что $C^{-1}A_iC = \mathrm{diag}(B_1^i, B_2^i, \ldots, B_p^i)$ — блочно-диагональные матрицы (для $i = 0, \ldots, m-1$), и каждый диагональный блок $B_j^i \in \mathbb{C}^{n_j\times n_j}$ обладает единственным собственным значением (то есть нильпотентен либо квазинильпотентен). В силу разложимости остальных матриц из Ω по базису, пространство $\Omega' = \mathrm{span}(C^{-1}A_0C, \ldots, C^{-1}A_{m-1}C)$ — подобная Ω коммутативная матричная алгебра — будет содержать только блочно-диагональные матрицы, и размерность при этом сохранится $\dim(\Omega) = \dim(\Omega')$.

Из коммутации матриц $C^{-1}A_0C, \ldots, C^{-1}A_{m-1}C$ следует, что блоки $B_j^1, B_j^2, \ldots, B_j^m$ будут также попарно коммутировать для $j = 1, \ldots, p$. Поэтому множества $\Omega_j = \mathrm{span}(B_j^0, B_j^2, \ldots, B_j^{m-1})$ будут матричными коммутативными алгебрами — нильпотентными либо квазинильпотентными. Рассмотрим прямую сумму алгебр Ω_j:
$\Omega_{\sum} = \Omega_1 \oplus \ldots \oplus \Omega_p = \{\mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_p) | A_j \in \Omega_j\} \supseteq \Omega'$.
Это также матричная коммутативная алгебра, и Ω' вложена либо равна ей. Получаем $\dim(\Omega) = \dim(\Omega') \leqslant \dim(\Omega_{\sum}) = \sum_j \dim(\Omega_j)$.

Чтобы сократить произвол в выборе блочно-диагонального представления и добиться строгого равенства: $\Omega = \Omega' \sim \Omega_1 \oplus \ldots \oplus \Omega_p$, поступим следующим образом. Среди всех матриц Ω найдём матрицу с наибольшим числом различных ненулевых собственных значений: предположим это матрица, обладающая q различными собственными значениями. Тогда существует преобразование подобия, переводящее матрицы Ω в блочно-диагональные матрицы с q квазинильпотентными блоками, при этом размер каждого блока будет равен l_i — алгебраической кратности соответствующего собственного значения λ_i выбранной матрицы (эту алгебру, подобную Ω обозначим Ω'). По этому преобразованию однозначно строятся квазинильпотентные алгебры $\Omega_1, \dots, \Omega_q$ (среди них, возможно, есть одна нильпотентная, в таком случае договоримся считать, что это Ω_q). Тогда будет иметь место равенство: $\Omega = \Omega' \sim \Omega_1 \oplus \dots \oplus \Omega_q$ (и, следовательно, $\dim(\Omega) = \sum_i \dim(\Omega_i)$). Докажем это.

В силу выбора алгебры Ω', в ней будет содержаться матрица A с q различными собственными значениями, подобная выбранной нами матрице. С помощью этой матрицы мы построим базис алгебры Ω' из матриц $X_1^1, \cdots, X^1_{\dim(\Omega_1)}, \cdots\cdots, X_1^q, \cdots, X^q_{\dim(\Omega_q)}$, где каждая матрица X_j^i содержит единственный ненулевой блок на главной диагонали в i-той позиции, $i = 1, \cdots, q$, $j = 1, \cdots, \dim(\Omega_i)$. При этом $\mathrm{span}(X_1^i, \cdots, X^i_{\dim(\Omega_i)}) = \{0\} \oplus \dots \oplus \{0\} \oplus \Omega_i \oplus \{0\} \oplus \dots \oplus \{0\}$. Из существования такого базиса непосредственно будет следовать доказываемое утверждение.

Нетрудно заметить, что если мы найдём q матриц $Y_1, \cdots, Y_q$ из Ω', содержащих на главной диагонали ровно по одному квазинильпотентному блоку размера $l_1, \cdots, l_q$ соответственно, то требуемый базис можно будет выбрать из матриц любого базиса Ω', умноженных на $Y_1, \cdots, Y_q$. Если же один из диагональных блоков нильпотентен, то, оказывается, таких матриц Y_i можно выбрать только $q-1$, с их помощью составляется базис алгебры $(\Omega_1 \oplus \dots \oplus \Omega_{q-1} \oplus \{0\})$, который можно дополнить до базиса Ω' матрицами с последним нильпотентным блоком.

Покажем, как избавиться от всех блоков матрицы A, кроме первого невырожденного (другими словами, как получить Y_1). Заметим, что матрица $\lambda_q A - A^2$ имеет ровно q собственных значений, последнее из которых 0 с алгебраической кратностью l_q. Обнулим последний блок, возведя её в степень $l_q - 1$. Полученную матрицу обозначим A_1. Она имеет на главной диагонали $q-1$ квазинильпотентный блок и один нулевой (последний). При этом собственные значения, соответствующие разным блокам, могут повторяться. Теперь избавимся от $(q-1)$-ого блока. Если $\lambda_1(A_1) \neq \lambda_{q-1}(A_1)$, то у матрицы $A_2 = \left(\lambda_{q-1}A_1 - (A_1)^2\right)^{l_{q-1}}$ на главной диагонали прибавится ещё хотя бы один нулевой блок (при этом первый блок останется невырожденным). Если же $\lambda_1(A_1) = \lambda_{q-1}(A_1)$, то вместо A_1 возьмём матрицу AA_1, и для неё проделаем указанные действия. И так далее.

Не более, чем за $q-1$ шагов получим матрицу с единственным блоком размера l_1 в левом верхнем углу. Если среди диагональных блоков A нет нильпотентных, то все матрицы $Y_1, \cdots, Y_q$ строятся аналогично в виде многочленов от A, в противном случае строим только $Y_1, \cdots, Y_{q-1}$.

Таким образом, произвольная матричная коммутативная алгебра подобна прямой сумме матричных коммутативных квазинильпотентных и нильпотентных алгебр, поэтому в дальнейшем ограничимся поиском оценок для них.

Покажем, как получается грубая оценка, зависящая только от n. Для этого, как и было предложено, сначала оценим размерность квазинильпотентной алгебры $\Omega_j \in \mathbb{C}^{n_j \times n_j}$ (в предположении, что $\Omega \sim \Omega' \subseteq \Omega_1 \oplus \ldots \oplus \Omega_p$). Известно, что набор попарно коммутирующих матриц одновременно приводится к верхнетреугольному виду. Проделав эту операцию с матрицами базиса Ω_j, получим набор линейно независимых верхнетреугольных матриц с одинаковыми значениями на главной диагонали (это следует из квазинильпотентности). Таких матриц не более $n_j(n_j-1)/2 + 1 = n_j^2/2 - n_j/2 + 1$. Отсюда получаем

$$\dim(\Omega') \leqslant \sum_{j=1}^{p} (n_j^2/2 - n_j/2 + 1) \leqslant n^2/2 - n/2 + 1.$$

Эта оценка является точной только для $n \leqslant 2$, поскольку при $n \geqslant 3$ всегда существует пара верхнетреугольных матриц, которые не будут коммутировать.

Теперь попытаемся использовать дополнительную информацию об алгебре. Для этого будем рассматривать величины, которые могут её характеризовать. Мы вводим для нильпотентных алгебр характеристики, связанные с дефектами содержащихся в них матриц. Для определения характеристик квазинильпотентных алгебр мы пользуемся тем, что любой квазинильпотентной алгебре соответствует единственная нильпотентная. Для произвольной же алгебры Ω характеристика задаётся совокупностью характеристик алгебр-слагаемых, входящих в разложение Ω в виде прямой суммы (в частности, она может равняться максимальной из характеристик для алгебр-слагаемых).

Первую используемую характеристику будем называть *общим дефектом* (или просто *дефектом*) и обозначать l_Ω или просто l. Дефект нильпотентной алгебры Ω равен размерности её общего ядра, то есть:

$$l = \dim \bigcap_{C\in\Omega} \ker(C) = \dim\{x \in \mathbb{C}^n \mid \forall\, C \in \Omega:\ Cx = 0\} \qquad (2)$$

Из нильпотентности следует $l \geqslant 1$ (так как у набора коммутирующих матриц всегда есть общий собственный вектор, а собственное значение у матриц нильпотентной алгебры единственно и равно нулю). Кроме того, $l < n$, если алгебра содержит хотя бы одну ненулевую матрицу.

Мы выведем оценку $\dim(\Omega) \leqslant l(n-l)$ (где Ω нильпотентная алгебра). Из неё, в частности, следует точная оценка в общем случае, равная $n^2/4+1$ (она получается максимизацией оценки по l). Мы приводим доказательство без использования нормальных форм и теорем Кравчука.

Другую характеристику алгебры будем называть *локальным дефектом* и обозначать k. Она определяется неоднозначно: мы будем говорить, что нильпотентная алгебра Ω обладает локальным дефектом k, если в ней есть хотя бы одна матрица с дефектом k. Таким образом, даже по единственной известной матрице из Ω мы сможем строить оценки размерности Ω.

Для получения оценок с k мы будем пользоваться известными особенностями вида матриц, коммутирующих с жордановой формой. Выводятся оценки $\dim(\Omega) < n(k-1/k)$ для $k>2$, $\dim(\Omega) = n-1$ для $k=1$ и $\dim(\Omega) \leqslant 5/4n$ для $k=2$ (для нильпотентных алгебр). Поскольку полученные оценки монотонно возрастают по k, для наилучшей оценки вводится следующая характеристика.

Минимальный дефект (k_{min}) определяется как минимальный из локальных дефектов:

$$k_{min} = \min_{C \in \Omega} \dim(\ker(C)) = \min_{C \in \Omega} \dim\{x \in \mathbb{C}^n \mid Cx = 0\} \qquad (3)$$

С помощью k_{min} из оценок по локальному дефекту k выбирается наилучшая оценка. Очевидно, что $l \leqslant k_{min} \leqslant k$. Этим также можно пользоваться для улучшения оценки.

Для произвольной алгебры Ω, подобной прямой сумме квазинильпотентных и нильпотентных алгебр ($\Omega \sim \Omega_1 \oplus \ldots \oplus \Omega_q$), однозначно с точностью до перестановок определяются наборы характеристик алгебр-слагаемых: $\{l_1, \ldots, l_q\}$, $\{k_{min\,1}, \ldots, k_{min\,q}\}$, и уже по ним строятся оценки размерности исходной алгебры Ω:

$$\dim(\Omega) = \sum_{j=1}^{q} \dim(\Omega_j) \qquad (4)$$

2. Оценки с использованием общего дефекта

Рассмотрим произвольную коммутативную нильпотентную алгебру Ω. Поскольку все матрицы из Ω обладают единственным собственным значением 0, в общем ядре Ω

$$L = \bigcap_{C \in \Omega} \ker(C) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \forall\, C \in \Omega :\ Cx = 0\} \qquad (5)$$

будет содержаться по меньшей мере один вектор — общий собственный вектор всех матриц из Ω (как известно, он существует у любого набора коммутативных матриц).

Как уже было сказано, общий дефект нильпотентной алгебры Ω — это размерность её общего ядра L. Если известен дефект Ω, то существует преобразование подобия, переводящее все матрицы Ω к специальному виду.

Утверждение 1. *Нильпотентная алгебра Ω с дефектом l подобна алгебре, каждая матрица которой содержит ровно l нулевых столбцов в одних и тех же позициях. В частности, все матрицы Ω одно-*

временно приводятся к виду

$$\begin{bmatrix} 0_{l\times l} & a_{l\times(n-l)} \\ 0_{(n-l)\times l} & b_{(n-l)\times(n-l)} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Не существует алгебры, подобной Ω, *все матрицы которой в одних и тех же позициях содержат более* l *нулевых столбцов.*

Доказательство. В L построим базис $a_1,\ldots,a_l$ и дополним его до базиса $\mathbb{C}^n$. В новом базисе Ω примет вид (6). Если предположить, что в некотором базисе все матрицы из Ω содержат более l нулевых столбцов в одних и тех же позициях, это будет означать, что более l векторов нового базиса лежат в L. Получаем противоречие с тем, что размерность L равна l. $\Box$

Теперь мы можем рассматривать только алгебры с матрицами в форме (6). Выберем базис $A_1,\ldots,A_s$, где $s=\dim(\Omega)$. Для правых верхних блоков матриц базиса верно следующее утверждение:

Утверждение 2. *Пусть матрицы базиса* Ω *имеют вид*

$$A_i = \begin{bmatrix} 0_{l\times l} & a^i_{l\times(n-l)} \\ 0_{(n-l)\times l} & b^i_{(n-l)\times(n-l)} \end{bmatrix}, \ i=1,\ldots,s. \tag{7}$$

Тогда матрица

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} a^1 \\ \cdots \\ a^s \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(ls)\times(n-l)},$$

составленная из блоков a^i *матриц базиса* A_i, *имеет полный столбцовый ранг:* $\operatorname{rank}(\mathfrak{A}) = n-l$.

Доказательство. Докажем это от противного. Предположим, что $\operatorname{rank}(\mathfrak{A}) = r < n-l$. Из этого следует, что первые $n-l-r$ столбцов этой матрицы можно обнулить:

$$\exists\, F:\ F^{-1}\mathfrak{A}F = \left[0_{(n-l)\times(n-l-r)}, \widetilde{\mathfrak{A}}\right]\ \widetilde{\mathfrak{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{a}^1 \\ \cdots \\ \tilde{a}^s \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(ls)\times r}.$$

Соответствующее преобразование подобия для матриц алгебры Ω приведёт матрицы базиса к следующему виду:

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & F^{-1} \end{bmatrix} A_i \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 0_{l\times l} & 0_{l\times(n-l-r)} & \tilde{a}^i_{l\times r} \\ 0_{(n-l-r)\times l} & b^i_{11\,(n-l-r)\times(n-l-r)} & b^i_{12\,(n-l-r)\times r} \\ 0_{r\times l} & b^i_{21\,r\times(n-l-r)} & b^i_{22\,r\times r} \end{bmatrix}$$

для $i = 1, \ldots, s$. Все остальные матрицы алгебры будут иметь ту же структуру (поскольку они линейно выражаются через $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_s$).

После этого для любой матрицы из условия коммутации с $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_s$ получаем, что $\tilde{a}^i b_{21} = 0$ для $i = 1, \ldots, s$. Это равносильно

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}^1 \\ \cdots \\ \tilde{a}^s \end{bmatrix} b_{21} = 0$$

Матрица $\mathfrak{A}$ имеет полный столбцовый ранг, следовательно $b_{21} = 0$.

Таким образом, матрицы алгебры имеют вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{a}^i \\ 0 & b^i_{11} & b^i_{12} \\ 0 & 0 & b^i_{22} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Из нильпотентности всей матрицы следует нильпотентность её диагональных блоков — b_{11}, b_{22}. Поэтому, если привести матрицы алгебры к верхнетреугольной форме, в блоке b_{11} появится нулевой первый столбец. Следовательно, во всех матрицах получившейся алгебры (подобной Ω) нулевых столбцов не менее $l + 1$, и все эти столбцы стоят в одних и тех же позициях (в начале). Таким образом мы приходим к противоречию с тем, что $\dim(L) = l$. Значит, действительно, $\operatorname{rank}(\mathfrak{A}) = n - l$, что и требовалось показать.

Теперь для доказательства основной оценки остаётся только показать связь между блоками a и b для матрицы в форме (6). $\square$

Утверждение 3. *Если все матрицы из алгебры Ω имеют вид (6), то из того, что блок a какой-либо матрицы нулевой, следует, что её блок b также окажется нулевым.*

Доказательство. Чтобы показать это, запишем условие коммутации такой матрицы со всеми матрицами базиса:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a^i \\ 0 & b^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^i \\ 0 & b^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & bb^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^i b \\ 0 & b^i b \end{bmatrix}.$$

Отсюда $a^i b = 0, \;\; i = 1, \dots, s$. Следовательно,

$$\begin{bmatrix} a^1 \\ \cdots \\ a^s \end{bmatrix} b = \widetilde{A} b = 0$$

Как было показано в утверждении 2, матрица $\widetilde{A}$ имеет полный столбцовый ранг, а значит $b = 0$. □

Утверждение 3 означает, что для матрицы в форме (6) по блоку a однозначно определяется блок b. В самом деле, если

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \in \Omega,$$

то

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_1 - b_2 \end{bmatrix} \in \Omega.$$

Из утверждения 3 получаем, что $b_1 - b_2 = 0$. Значит, линейно независимых матриц в Ω не более, чем линейно независимых блоков a. Из этого уже непосредственно следует основная оценка.

Теорема 1. *Нильпотентная алгебра с дефектом* l *имеет размерность не более* $l(n-l)$.

Доказательство. Из утверждения 1 следует, что Ω подобна алгебре с матрицами в форме

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Из утверждения 3 следует, что блок b однозначно определяется блоком a. Блок a имеет размер $l \times (n-l)$, значит различных линейно независимых блоков a не более $l(n-l)$.

Оценка, доказанная в теореме 1, не является монотонной по l, а достигает своего максимального значения $[n^2/4]$ при $l=[n/2]$. Для квазинильпотентной и произвольной алгебры отсюда следует оценка Шура

$$\dim(\Omega) \leqslant [n^2/4] + 1. \tag{10}$$

Как было показано в (1), существуют алгебры такой размерности, а значит, полученная оценка (10) является точной.

3. Оценки с использованием локального дефекта

Для построения оценок мы будем пользоваться тем, что если алгебра Ω вложена в некоторое линейное подпространство X, то $\dim(\Omega) \leqslant \dim(X)$. Если выбрать несколько матриц из Ω и задавать подпространство X как множество матриц, коммутирующих с выбранными, то, очевидно, $\Omega \subseteq X$. При выводе оценок мы будем выбирать из Ω две матрицы таким образом, чтобы максимально сузить X.

3.1. $k=1$. Пусть в квазинильпотентной алгебре Ω есть матрица A, имеющая собственное значение λ_A геометрической кратности 1.

Перейдём к подобной алгебре Ω', получаемой с помощью преобразования, переводящего A в жорданову форму. В Ω' есть единица, следовательно, $A'-\lambda_A I = J$ — жорданова клетка размера n — также содержится в Ω'. Найдём размерность $\widetilde{\Omega}$ — множества матриц, коммутирующих с J. Очевидно, что $\Omega' \subseteq \widetilde{\Omega}$, однако, можно утверждать, что $\Omega' = \widetilde{\Omega}$.

Жорданова клетка J, как известно, коммутирует со всеми верхнетреугольными тёплицевыми матрицами:

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{t-1} \\ & b_0 & \cdots & b_{t-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & b_0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Линейно независимых верхнетреугольных тёплицевых матриц всего n, и все они линейно выражаются через $I, J, J^2, \ldots, J^{n-1}$ (а все эти матрицы обязательно содержатся в Ω', поскольку алгебра по определению замкнута относительно умножения). Поэтому $\dim(\widetilde{\Omega'}) = n$.

Таким образом, размерность квазинильпотентной алгебры $\Omega \subseteq R^{n\times n}$, содержащей матрицу геометрической кратности 1, в точности равна n.

3.2. $k = 2$. Пусть в квазинильпотентной алгебре Ω есть матрица A с собственным значением $\lambda_A = 0$ геометрической кратности 2 (единственное собственное значение A). Её жорданова форма $J = D^{-1}AD$ будет состоять из двух жордановых клеток размеров s и t: $J = \mathrm{diag}(J_s, J_t)$. Будем считать, что $s \leqslant t$. Как и в случае $k = 1$, перейдём к подобной алгебре $\Omega' = \{D^{-1}CD | C \in \Omega\}$. Таким образом $J \in \Omega'$

Построим базис Ω': $B_0, \ldots, B_{m-1}$. Матрицы $I, J, J^2, \ldots, J^{t-1}$ содержатся в Ω' и линейно независимы (кроме того, при $i \geqslant t$ $J^i = 0$). Поэтому их можно взять в качестве первых t матриц базиса: $B_i = J^i$, $i = 0, \ldots, t-1$.

Очевидно, что с единичной матрицей B_0 коммутирует любая матрица соответствующего размера. Если некоторая матрица коммутирует с $B_1 = J$, то она также будет коммутировать с $B_2, \ldots, B_{t-1}$. Таким образом, получив размерность подпространства $\{C \in \mathbb{C}^{n\times n} | CJ - JC = 0\}$, мы будем иметь оценку для $\dim(\Omega')$. Но мы не ограничимся этим, а возьмём более узкое подпространство. Для этого некоторым оптимальным образом выберем среди матриц Ω' вторую матрицу K, не выражающуюся линейно через $B_0, \ldots, B_{t-1}$, и будем оценивать размерность $\widetilde{\Omega} = \{C \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid CJ - JC = CK - KC = 0\}$. Очевидно, что $\Omega' \subseteq \widetilde{\Omega}$, однако, в некоторых случаях оказывается, что $\Omega' = \widetilde{\Omega}$, таким образом получаемые оценки будут точны.

Дальнейшие рассуждения зависят от того, равны ли размеры жордановых клеток.

3.2.1. Случай одинаковых жордановых блоков $s = t = n/2$.. Из условия коммутации с $B_1 = J$ следует, что матрицы $B_t, \ldots, B_{m-1}$ имеют вид

$$B_i = \begin{bmatrix} B_{i1} & B_{i2} \\ B_{i3} & B_{i4} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

где каждый из блоков B_{ij} $(i = t, \ldots, m-1)$ является верхнетреугольной тёплицевой матрицей.

Отнимая от B_i $(i = t, \ldots, m-1)$ линейные комбинации $I, J, \ldots, J^{t-1}$ легко получить

$$B'_i = \begin{bmatrix} B'_{i1} & B'_{i2} \\ B'_{i3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{i1} - B_{i4} & B_{i2} \\ B_{i3} & 0 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

при этом блоки B'_{ij} также будут верхнетреугольными тёплицевыми и, кроме того, нильпотентными (поскольку матрицы B'_i нильпотентны).

Теперь выберем матрицу K — вторую матрицу, с которой коммутируют элементы $\widetilde{\Omega}$. Для этого среди блоков B'_{ij} $(i = t, \ldots, m-1;\ j = 1, 2, 3)$ найдём такой, у которого ненулевые элементы расположены ближе всего к диагонали:
$(B'_{ij})_0 = (B'_{ij})_1 = \ldots = (B'_{ij})_{h-1} = 0$ для $\forall i, j$, и $\exists i_0, j_0$ такие, что $(B'_{i_0 j_0})_h \neq 0$
(под $(B'_{ij})_l$ понимаем элемент верхнетреугольной тёплицевой матрицы B'_{ij}, расположенный на l-той диагонали).

Таким образом, мы выбираем матрицу, содержащую верхнетреугольный тёплицев блок максимального ранга. Из нильпотентности и вернетреугольности блоков B'_{ij} следует, что $h \geqslant 1$. Если таких блоков несколько, можно взять любой. Теперь в качестве матрицы K выбираем B_{i_0}. Как было сказано, будем оценивать размерность $\widetilde{\Omega} = \{C \mid CJ - JC = CK - KC = 0\}$.

Для этого среди матриц

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

с верхнетреугольными тёплицевыми блоками найдём все такие, которые коммутируют с B'_{i_0} (коммутация с J обеспечивается специальным видом матриц C).

Расписав блочное произведение $B'_{i_0} C = C B'_{i_0}$ и воспользовавшись тем, что верхнетреугольные тёплицевы матрицы всегда коммутируют, получим:

$$\begin{aligned} B'_{i_0 3} C_2 &= B'_{i_0 2} C_3 \\ B'_{i_0 1} C_3 &= B'_{i_0 3} C_1 \\ B'_{i_0 2} C_1 &= B'_{i_0 1} C_2 \end{aligned} \tag{15}$$

Если $h \geqslant t/2$, то соотношения (15) всегда будут выполняться (поскольку каждое из произведений будет в точности равно 0). Таких линейно независимых матриц C будет не более $3(t-h)$, а значит, и не более $3/4n$. Кроме того, нужно учесть матрицы $I, J, J^2, \ldots, J^{t-1}$, которых ровно $n/2$. Итого получится $\dim(\widetilde{\Omega}) \leqslant 5/4n$.

Теперь рассмотрим случай $h < t/2$. Из соотношений (15) нельзя почерпнуть никакую информацию об элементах $c^1_{t-h}, \ldots, c^1_{t-1}$, $c^2_{t-h}, \ldots, c^2_{t-1}$ и $c^3_{t-h}, \ldots, c^3_{t-1}$ (так как они участвуют с нулевыми сомножителями), и поэтому эти элементы задаются произвольно. Остальные же элементы ($c^1_h, \ldots, c^1_{t-h-1}$, $c^2_h, \ldots, c^2_{t-h-1}$ и $c^3_h, \ldots, c^3_{t-h-1}$) однозначно определяются из (15) по известным $c^{j_0}_h, \ldots, c^{j_0}_{t-h-1}$.

Чтобы показать это, выпишем потенциально-ненулевые блоки матриц $B'_{i_0 j}$ размеров $(t-h) \times (t-h)$:

$$B'_{i_0 j} = \begin{bmatrix} 0 & \widehat{B_j} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

где $j = 1, 2, 3$ (при этом хотя бы одна из матриц $\widehat{B_1}$, $\widehat{B_2}$ и $\widehat{B_3}$, а именно $\widehat{B_{j_0}}$, гарантированно невырожденная).

$$\widehat{B_j} = \begin{bmatrix} b^j_h & b^j_{h+1} & \ldots & b^j_{t-2} & b^j_{t-1} \\ 0 & b^j_h & \ldots & b^j_{t-3} & b^j_{t-2} \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ldots & \ldots & b^j_h & b^j_{h+1} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & b^j_h \end{bmatrix}, j = 1, 2, 3$$

В соотношении (15) блоки $\widehat{B_j}$ будут умножаться на блоки матриц

C_j, размера $(t-h)\times(t-h)$, расположенные в правом нижнем углу:

$$C_j = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ 0 & \widehat{C_j} \end{bmatrix}, j = 1, 2, 3$$

При этом блоки $\widehat{C_j}$ будут иметь вид:

$$\widehat{C_j} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & c^j_h & c^j_{h+1} & \dots & c^j_{t-h-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c^j_h & \dots & c^j_{t-h-2} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c^j_h \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, j = 1, 2, 3 \qquad (17)$$

Тогда (15) эквивалентно $\widehat{B_3}\widehat{C_2} = \widehat{B_2}\widehat{C_3}$, $\widehat{B_1}\widehat{C_3} = \widehat{B_3}\widehat{C_1}$ и $\widehat{B_2}\widehat{C_1} = \widehat{B_1}\widehat{C_2}$.

Так как матрица $\widehat{B_{j_0}}$ невырождена, по известному блоку $\widehat{C_{j_0}}$ определяются остальные блоки $\widehat{C_j}$.

Итого получаем

$$((t-h-1)-(h-1)) + 3(t-1-(t-h-1)) = t + h \leqslant 3/4n \qquad (18)$$

степеней свободы для матриц C. С учётом $I, J, J^2, \dots, J^{t-1}$ будем иметь $\dim(\widetilde{\Omega}) \leqslant 5/4n$.

3.2.2. Случай разных жордановых блоков $s < t$, $s + t = n$**..** Из условия коммутации с $B_1 = J$ следует, что матрицы $B_t, \dots, B_{m-1}$ имеют вид

$$B_i = \begin{bmatrix} B_{i1} & B_{i2} \\ B_{i3} & B_{i4} \end{bmatrix}, \qquad (19)$$

где блоки B_{i1}, B_{i4} $(i = t, \dots, m-1)$ верхнетреугольные тёплицевы (размеров $s\times s$ и $t\times t$ соответственно), а блоки B_{i1}, B_{i4} имеют вид:

$$B_{i2} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{B_{i2}} \end{bmatrix}, \ B_{i3} = \begin{bmatrix} \widetilde{B_{i3}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

где блоки $\widetilde{B_{i1}}, \widetilde{B_{i3}}$ верхнетреугольные тёплицевы размеров $s \times s$.

Отнимая от B_i $(i = t, \dots, m-1)$ линейные комбинации $I, J, \dots, J^{t-1}$ можно обнулить блоки B_{i4}, при этом остальные блоки сохранят указанную структуру. Получим

$$B_i' = \begin{bmatrix} B_{i1}' & B_{i2}' \\ B_{i3}' & 0 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

$$B_{i2}' = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{B_{i2}'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{B_{i2}} \end{bmatrix},\ B_{i3} = \begin{bmatrix} \widetilde{B_{i3}'} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{B_{i3}} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Условие коммутации для двух матриц B_i', B_j' (i и j любые от t до $m-1$):

$$B_{i2}'B_{j3}' = B_{j2}'B_{i3}' \tag{22}$$
$$B_{i1}'B_{j2}' = B_{j1}'B_{i2}' \tag{23}$$
$$B_{i3}'B_{j1}' = B_{j3}'B_{i1}' \tag{24}$$
$$B_{i3}'B_{j2}' = B_{j3}'B_{i2}' \tag{25}$$

В отличие от случая $t = s$, где блоки матриц B_i', B_j' квадратные размера $t \times t$, мы не можем воспользоваться коммутативностью произведения блоков (поскольку блоки $B_{i1}, B_{i4}, B_{j1}, B_{j4}$ уже не квадратные). Зато, благодаря представлению (21), соотношения (23), (24), (25) эквивалентны следующим соотношениям для квадратных блоков размера $s \times s$:

$$B_{i1}'\widetilde{B_{j2}'} = B_{j1}'\widetilde{B_{i2}'} \tag{26}$$
$$\widetilde{B_{i3}'}B_{j1}' = \widetilde{B_{j3}'}B_{i1}' \tag{27}$$
$$\widetilde{B_{i3}'}\widetilde{B_{j2}'} = \widetilde{B_{j3}'}\widetilde{B_{i2}'} \tag{28}$$

(очевидно, откинув условие (22), мы не уменьшили количество матриц, удовлетворяющих условиям коммутации).

Теперь легко заметить, что полученные соотношения (26), (27), (28) обеспечивают коммутацию матриц $\widehat{B_i}, \widehat{B_j} \in \mathbb{C}^{2s\times 2s}$ с квадратными вернетреугольными тёплицевыми блоками:

$$\widehat{B_i'} = \begin{bmatrix} B_{i1}' & \widetilde{B_{i2}'} \\ \widetilde{B_{i3}'} & 0 \end{bmatrix},\ \widehat{B_j'} = \begin{bmatrix} B_{j1}' & \widetilde{B_{j2}'} \\ \widetilde{B_{j3}'} & 0 \end{bmatrix}$$

Мы показали, что если матрицы B'_i, B'_j коммутируют, то матрицы $\widehat{B_i}, \widehat{B_j}$ также коммутируют. Кроме того, очевидно, что матрицы $B'_t, \ldots, B'_{m-1}$ линейно независимы тогда и только тогда, когда матрицы $\widehat{B'_t}, \ldots, \widehat{B'_{m-1}}$ линейно независимы.

Вопросы выбора матрицы $\widehat{K}$ из $\widehat{B'_t}, \ldots, \widehat{B'_{m-1}}$ и выяснения количества линейно независимых матриц требуемого вида, коммутирующих с $\widehat{K}$, сводится к аналогичным вопросам в рассмотренном ранее случае жордановых блоков одинакового размера при $\widehat{n} = 2s$. Таких матриц (см. 18) не более $3/4\widehat{n} = 3/2s$. С учётом $I, J, J^2, \ldots, J^{t-1}$ получим: $\dim(\widetilde{\Omega}) \leqslant 3/2s + t = 3/4n - 1/4(t-s) < 5/4n$ Таким образом, оценка $\dim(\Omega) \leqslant 5/4n$ верна вне зависимости от соотношения между размерами жордановых блоков. Можно показать [2], что для некоторых алгебр эта оценка точна.

3.3. k **одинаковых жордановых блоков.** Пусть алгебра Ω содержит матрицу A, подобную жордановой форме $G = \mathrm{diag}(\underbrace{J, \ldots, J}_{k}) = DAD^{-1}$, где все жордановы клетки J размера $t \times t$ $(n = kt)$. Тогда можно перейти к подобной алгебре $\Omega' = \{C' | C' = DCD^{-1},\ C \in \Omega\}$, содержащей матрицу G (опять же $\dim(\Omega) = \dim(\Omega')$).

Построим базис Ω'. Поскольку матрицы $I, G, \ldots, G^{t-1}$ линейно независимы, существует базис Ω': $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$, в котором $A_i = A^i$, $i = 0, \ldots, t-1$.

В силу коммутации с G все матрицы A_l $(l = 0, \ldots, m-1)$ будут состоять из k^2 верхнетреугольных тёплицевых блоков размера $t \times t$:

$$A_l = \begin{bmatrix} A^l_{11} & A^l_{12} & \ldots & A^l_{1k} \\ A^l_{21} & A^l_{22} & \ldots & A^l_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A^l_{k1} & A^l_{k2} & \ldots & A^l_{kk} \end{bmatrix} \tag{29}$$

Теперь преобразуем матрицы базиса специальным образом (смысл этого преобразования разъяснится позже). Если у тёплицевых блоков матрицы A_i — $A^i_{11}, A^i_{22}, \ldots, A^i_{kk}$ — совпадают первые h_i элементов в первых строках, то в силу верхнетреугольной тёплицевой структуры блоков матриц A_i первые h_i диагоналей каждого из этих блоков можно обнулить, отнимая от A_l линейные комбинации $I, J, \dots, J^{t-1}$ (из нильпотентности матриц A_i следует, что $h_i \geqslant 1$). Получаем новый базис $B_0, \dots, B_{t-1}, B_t, \dots, B_{m-1}$, $B_0 = A_0 = I, B_1 = A_1 = G, \dots, B_{t-1} = A_{t-1} = G^{t-1}$ (блоки матриц нового базиса по-прежнему верхнетреугольные тёплицевы).

Теперь, как и в случае двух одинаковых жордановых блоков, определим число h — номер первой ненулевой диагонали среди блоков матриц B_i $(i = t, \dots, m-1;\ 1 \leqslant h \leqslant t)$.
$(B^l_{ij})|_{1s} = 0$ для $\forall l, i, j,\ s \leqslant h$ и $\exists l_0, i_0, j_0$ такие, что $(B^{l_0}_{i_0 j_0})_{1,h+1} \neq 0$. (другими словами выбираем блок наибольшего ранга r_0 среди тёплицевых блоков матриц $A_t, \dots, A_{m-1}$, тогда $h = t - r_0$) Матрицу B_{l_0}, которая обладает наибольшим числом блоков с ненулевой h-той диагональю, обозначим K. Отметим, что если бы мы не провели указанную махинацию с матрицами базиса, то h могло бы оказаться равным 0 (поскольку к любой матрице базиса можно прибавить I), и h не несло бы никакой полезной для нас информации (с той же целью в предыдущих параграфах мы обнуляли один из диагональных блоков).

Выясним теперь условия коммутации остальных матриц с K.

При $h \geqslant t/2 = n/2k$ любая матрица указанного вида будет коммутировать с K (поскольку $KB_l = B_l K = 0$). При этом среди них встретятся $G^h, \dots, G^{t-1}$. Получим

$$\dim(\Omega') = t - h + k^2 \frac{t}{2} \leqslant \frac{t}{2} + \frac{kn}{2} = \frac{n}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right) \qquad (30)$$

Далее считаем $h < t/2$.

Расписав блочные произведения $KB_l = B_l K$ и воспользовавшись коммутативностью произведения верхнетреугольных тёплицевых матриц, получим k^2 матричных уравнений вида

$$(K_{1i} B^l_{j1} + \ldots + K_{ki} B^l_{jk}) - (K_{j1} B^l_{1i} + \ldots + K_{jk} B^l_{ki}) = 0 \qquad (31)$$

для $i, j = 1, \dots, k$.

Поскольку блоки B^l_{ij} верхнетреугольные тёплицевы, эти уравнения равносильны уравнениям для их последних столбцов. Обозначим последний столбец блока B^l_{ij} как $b^l_{ij} \in \mathbb{C}^t$ (по нему блок B^l_{ij}

однозначно определяется). Тогда каждое матричное уравнение (31) эквивалентно уравненению для вектор-столбцов b_{ij}^l:

$$(K_{1i}b_{j1}^l + \ldots + K_{ki}b_{jk}^l) - (K_{j1}b_{1i}^l + \ldots + K_{jk}b_{ki}^l) = 0 \qquad (32)$$

их также будет k^2.

Из того, как мы задали h, следует, что не менее h последних элементов каждого из векторов b_{ij}^l нулевые. Всего получаем k^2h нулей.

Поскольку в (32) при первых h элементах b_{ij}^l стоят только нулевые сомножители (см. способ выбора K), задаются они произвольно. Итого hk^2 степеней свободы. Обрежем вектора b_{ij}^l, исключив эти первые h элементов. Получим вектора ${b_{ij}^l}' \in \mathbb{C}^{t-h}$. При этом последние $h-1$ координат векторов ${b_{ij}^l}'$ равны 0 (это следует из способа определения h).

Обозначим правые верхние потенциально-ненулевые подблоки блоков K_{ij} как $K'_{ij} \in \mathbb{C}^{(t-h)\times(t-h)}$. Они верхнетреугольные тёплицевы, один из них гарантированно невырожденный. Обозначим матрицу из преобразованных блоков в прежнем порядке K'.

Для обрезанных матриц K'_{ij} и обрезанных векторов ${b_{ij}^l}'$ соотношения (32) переписываются аналогичным образом:

$$(K'_{1i}{b_{j1}^l}' + \ldots + K'_{ki}{b_{jk}^l}') - (K'_{j1}{b_{1i}^l}' + \ldots + K'_{jk}{b_{ki}^l}') = 0 \qquad (33)$$

Невырожденный блок Ki_0j_0 встречается среди уравнений (33) $2k$ раз, при чём можно выделить $2k-1$ уравнений, в каждом из которых он встречается в произведении с векторами, которые не фигурируют в оставшихся $2k-2$ уравнениях. Это означает, что $2k-1$ векторов ${b_{ki}^l}'$ выражаются через остальные.

Можно объяснить это иначе.

Из векторов ${b_{11}^l}', \ldots, {b_{1k}^l}', {b_{21}^l}', \ldots\ldots, {b_{kk}^l}'$ склеим вектор $b^l \in \mathbb{C}^{k^2(t-h)}$. Для него набор уравнений (33) переписывается в виде системы: $\mathbf{X}b^l = 0$, где $\mathbf{X}$ блочная матрица специального вида:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -K'^{BT} + \mathrm{diag}[K'_{11}] & \mathrm{diag}[K'_{12}] & \ldots & \mathrm{diag}[K'_{1k}] \\ \mathrm{diag}[K'_{21}] & -K'^{BT} + \mathrm{diag}[K'_{22}] & \ldots & \mathrm{diag}[K'_{2k}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{diag}[K'_{k1}] & \mathrm{diag}[K'_{k2}] & \ldots & -K'^{BT} + \mathrm{diag}[K'_{kk}] \end{bmatrix}$$

K'^{BT} — блочное транспонирование;
$\mathrm{diag}[K'_{ij}] = \mathrm{diag}(\underbrace{K'_{ij},\ldots,K'_{ij}}_{k}) \in \mathbb{C}^{(k(t-h))\times(k(t-h))} = \mathbb{C}^{(n-kh)\times(n-kh)}$ — блочно-диагональная матрица.

Из способа выбора матрицы K следует, что $\mathrm{rank}(\mathbf{X}) \geqslant (2k-2)(t-h) \leqslant 2n-2kh+2t-2h$.

Тогда $(2k-1)(t-2h+1)$ элементов определяются по известным остальным $k^2(t-2h)-(2k-2)(t-2h) = (k-1)^2(t-2h+1)$ его элементам. С учётом hk^2 произвольно задаваемых элементов и $I, J, \ldots, J^{t-h}$ получаем

$$\dim(\Omega') = hk^2 + t - h + (k^2-2k-2)(t-2h) \leqslant n\,(k-1/k) \qquad (34)$$

Таким образом, из (30), (34) следует, что для алгебры, содержащей матрицу с k одинаковыми жордановыми блоками, верна оценка

$$\dim(\Omega) < \max\left[\frac{n}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right);\; n\left(k-\frac{1}{k}\right)\right] \qquad (35)$$

Поскольку полученная оценка является возрастающей функцией от k, то для получения наилучшей оценки нужно выбрать минимальный локальный дефект $k_{\min}$:

$$\dim(\Omega) < \max\left[\frac{n}{2}\left(k_{\min}+\frac{1}{k_{\min}}\right);\; n\left(k_{\min}-\frac{1}{k_{\min}}\right)\right] \qquad (36)$$

(таким образом, мы выбираем наилучшую из локальных оценок).

Однако даже теперь полученная оценка (36) может быть завышена: во-первых, мы не учитываем, что матрицы из Ω не могут иметь меньший дефект (поскольку мы выбираем G с дефектом $k_{\min}$, минимальным в Ω), и, во-вторых, среди матриц, коммутирующих с G и K, мы учитываем также матрицы, не являющиеся нильпотентными (которых заведомо не может быть в Ω). Особенно значительна ошибка при больших k. Максимум оценки (36) достигается при $k = n$ и равен n^2-1, что значительно привосходит точную верхнюю оценку $n^2/4$.

Мы не доказали, что для k блоков разных размеров оценка (36) по-прежнему будет верна, но, по аналогии со случаем $k = 2$, это кажется верным. Оставляем это утверждение в качестве гипотезы.

4. Связь оценок с l и k

Очевидно, полученные оценки и от l, и от k завышены. Например, для нильпотентной алгебры, порождённой матрицей $G = \mathrm{diag}(J, J)$ (где J — жорданова клетка размера $n/2$), — $\Omega = \mathrm{span}(G, G^2, \ldots, G^{n/2-1})$ — общий и минимальный дефекты равны 2, и мы получаем оценки $2n-4$ (от l) и $5/4n$ (от $k_{\min}$), в то время как на самом деле $\dim(\Omega) = n/2-1$. В данном случае оценка от l хуже, чем от $k_{\min}$. Однако, возможны и обратные ситуации, когда оценка от l лучше.

Поскольку $l \leqslant k_{\min} \leqslant k$ и оценка $l(n-l)$ монотонно возрастает при $l \leqslant n/2$, в неё можно подставлять локальные дефекты $k \leqslant n/2$. Если же $k > n/2$, то это уже невозможно: может оказаться, что $l = n/2$, и тогда $l(n-l) > k(n-k)$. Но в этом случае ($k > n/2$) почти всегда (а именно при $n > 2$) оценка от k будет превосходить точную верхнюю оценку $n^2/4$:

$$k > n/2 \; => \; n\left(k - \frac{1}{k}\right) > n\left(\frac{n}{2} - \frac{2}{n}\right) = \frac{n^2}{2} - 2 > \frac{n^2}{4} \qquad (37)$$

Оценки по $k(n-k)$ и $n(k-1/k)$ совпадут при $k = \sqrt[3]{n}$, поэтому локальную оценку можно модифицировать следующим образом:

$$\dim(\Omega) \leqslant f(k),\; f(k) = \begin{cases} n, & k = 1 \\ 5/4n, & k = 2 \\ n\,(k - 1/k)\,, & 2 < k \leqslant [\sqrt[3]{n}] \\ k\,(n-k)\,, & [\sqrt[3]{n}] < k < n/2 \\ n^2/4, & n/2 \leqslant k \end{cases} \qquad (38)$$

Эта оценка улучшается при подстановке k_{min}. Для каждого из интервалов изменения k существуют алгебры, для которых полученная оценка будет точной.

Список литературы

[1] Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Перестановочные матрицы — Москва: Едиториал УРСС, 2003.

[2] K. C. O'Meara, C. Vinsonhaler. On approximately simultaneously diagonalizable matrices // *Linear algebra and its applications*. 2006. №1. P. 39-74.